Dr. M. Friesen WS 2016/2017

Wahrscheinlichkeitstheorie 1

Blatt 2

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei $c > 0$, $a \in \mathbb{R}$ und

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + (x-a)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass p integrierbar ist mit $\int\limits_{\mathbb{R}} p(x)\mathrm{d}x = 1$ und dass die Momente nicht existieren, d.h.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |x|^k p(x)\mathrm{d}x = \infty, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $\lambda > 0$, die Exponentialverteilung auf $\mathbb{R}_+$ ist definiert über $\mu(\mathrm{d}x) = p(x)\mathrm{d}x$, wo

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Bestimmen sie die ersten 3 Momente

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^k \mathrm{d}\mu(x), \quad k = 0, 1, 2$$

sowie die zentrierten Momente $\int\limits_{\mathbb{R}} \left(x - \frac{1}{\lambda}\right)^k \mathrm{d}\mu(x)$ mit $k = 1, 2$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Seien X, Y Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. X, Y sind unabhängig.
2. $f(X), g(Y)$ sind unabhängig für jede Wahl von beschränkten messbaren Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
3. $f(X), g(Y)$ sind unabhängig für jede Wahl von stetigen, beschränkten Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*

(a) Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$. Es gelte $\mathbb{P}(X+Y=\alpha)$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass X und Y fast sicher konstant sind bezüglich $\mathbb{P}$.

(b) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen, $\mathcal{F}_n := X_n^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und

$$\mathcal{T}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \sigma\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} \mathcal{F}_k\right).$$

Zeigen Sie

$$\left\{\omega \in \Omega \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\omega) \text{ konvergiert}\right\} \in \mathcal{T}_\infty.$$